

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2018

### Aufgaben für das Fach Mathematik

#### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

#### 1 Aufgabe

Eine Firma stellt Flachbildschirme her. Im Mittel ist einer von fünf hergestellten Bildschirmen fehlerhaft.

- a** Es soll angenommen werden, dass die Anzahl fehlerhafter Geräte unter zufällig ausgewählten Bildschirmen durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:  
A: „Von 50 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft.“  
B: „Von 200 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 15 % und weniger als 25 % fehlerhaft.“

Fehler der Bildschirme treten am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- ◆ das Display defekt ist, 10,7 %,
- ◆ weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- ◆ entweder das Display oder das Netzteil defekt ist, 11,7 %.

**b** Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

**c** Untersuchen Sie, ob die beiden betrachteten Defekte unabhängig voneinander auftreten.

**BE**

5

4

3

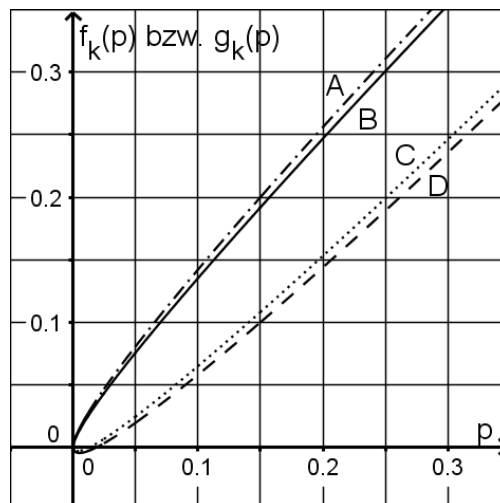
Jeder Bildschirm wird vor der Auslieferung abschließend geprüft.

**d** Von vierzig abschließend geprüften Bildschirmen, unter denen sechs fehlerhaft sind, werden zehn zufällig ausgewählt. Beurteilen Sie, ob die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt ist. 2

**e** Bei der abschließenden Prüfung werden alle fehlerfreien Bildschirme als fehlerfrei eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerhafter Bildschirm als fehlerhaft eingestuft wird, wird mit  $x$  bezeichnet. Ein im Rahmen der Prüfung als fehlerfrei eingestufte Bildschirm wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von  $x$ , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Bildschirm fehlerhaft ist, höchstens 5 % beträgt. 5

Ein Mitarbeiter der Firma bezweifelt, dass im Mittel einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft ist. Um einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, zieht er eine große Stichprobe vom Umfang  $n$ . In der Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft.

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

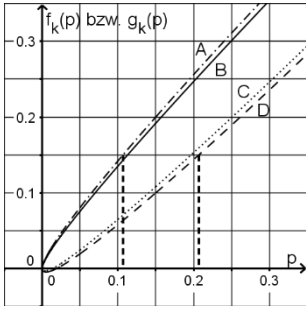
Dabei ist  $p \in [0;1]$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  und  $n$  der Umfang der Stichprobe.

**f** Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft.“ durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

**g** Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang  $2n$ . Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	<b>BE</b>																
<b>a</b> X: Anzahl der fehlerhaften Bildschirme $P_{0,2}^{50}(X \leq 8) \approx 30,7\%$ $P_{0,2}^{200}(30 < X < 50) \approx 90,8\%$	5																
<b>b</b> D: „Das Display ist defekt.“ N: „Das Netzteil ist defekt.“ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>D</td> <td><math>\bar{D}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>1,0 %</td> <td>2,0 %</td> <td>3,0 %</td> </tr> <tr> <td><math>\bar{N}</math></td> <td>9,7 %</td> <td>87,3 %</td> <td>97,0 %</td> </tr> <tr> <td></td> <td>10,7 %</td> <td>89,3 %</td> <td>100 %</td> </tr> </table>		D	$\bar{D}$		N	1,0 %	2,0 %	3,0 %	$\bar{N}$	9,7 %	87,3 %	97,0 %		10,7 %	89,3 %	100 %	4
	D	$\bar{D}$															
N	1,0 %	2,0 %	3,0 %														
$\bar{N}$	9,7 %	87,3 %	97,0 %														
	10,7 %	89,3 %	100 %														
<b>c</b> $P(D) \cdot P(N) = 0,107 \cdot 0,03 = 0,00321 \neq 0,01 = P(D \cap N)$ Die beiden Defekte treten also nicht unabhängig voneinander auf.	3																
<b>d</b> Die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten ist nicht binomialverteilt. Begründung: Wäre die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt, so wäre es beispielsweise möglich, dass sieben Bildschirme fehlerhaft sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zum Sachzusammenhang.	2																
<b>e</b> $\frac{0,2 \cdot (1-x)}{0,8+0,2 \cdot (1-x)} \leq 0,05 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{19}$ Der kleinstmögliche Wert von x ist $\frac{15}{19}$ .	5																
<b>f</b>  <p>Als Konfidenzintervall ergibt sich näherungsweise <math>[0,11; 0,21]</math>.                      Da das Konfidenzintervall den Wert 0,2 enthält, kann die Aussage gestützt werden.</p>	3																
<b>g</b> Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3																
	25																

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen <sup>1</sup>						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5			I		I		X		
b	4		II		II		II		X	
c	3	I		II		I			X	
d	2	II		II			II		X	
e	5		III			III	II			X
f	3			II	II				X	
g	3	III	II			II				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>1</sup> Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.