

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

| Anforderungsniveau | Prüfungsteil | Sachgebiet | digitales Hilfsmittel |
|--------------------|--------------|------------|-----------------------|
| erhöht             | B            | Stochastik | CAS                   |

### 1 Aufgabe

**1** Wird den Tageseinnahmen eines Cafés ein Geldschein zufällig entnommen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser nicht mehr umlauffähig ist, 2 %.

**a** Unter den Tageseinnahmen des Cafés befinden sich insgesamt 200 Geldscheine. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter

- ◆ ausschließlich umlauffähige Geldscheine sind.
- ◆ höchstens zwei Geldscheine sind, die nicht mehr umlauffähig sind.

**b** Bestimmen Sie die Anzahl der Geldscheine, die mindestens zu den Tageseinnahmen des Cafés gehören müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens vier nicht mehr umlauffähige Scheine sind.

**2** In einem Behälter befinden sich insgesamt 380 Geldscheine. Deren Verteilung kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

| Wert des Scheins | 5 € | 10 € | 20 € | 50 € |
|------------------|-----|------|------|------|
| Anzahl           | 44  | 60   | 72   | 204  |

Sechs dieser Geldscheine sind nicht mehr umlauffähig, darunter zwei mit einem Wert von jeweils 50 €.

**a** Aus dem Behälter wird ein Geldschein zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Schein einen Wert unter 50 € hat und umlauffähig ist.

BE

3

4

3

- b** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term  $\frac{\binom{6}{2} \binom{374}{5}}{\binom{380}{7}}$  berechnet werden kann.

2

Geben Sie dieses Ereignis an.

- 3** In der ersten Hälfte des Jahres 2015 hat die Europäische Zentralbank (EZB) von etwa 17 Milliarden im Umlauf befindlichen Geldscheinen insgesamt 454 000 gefälschte Scheine aussortiert. Deren Verteilung ist im abgebildeten Diagramm dargestellt.

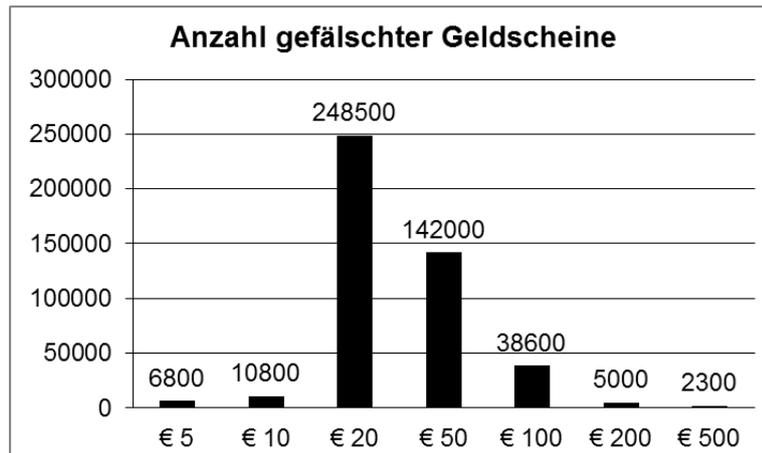


Abb. 1

- a** Einer dieser aussortierten gefälschten Geldscheine wird zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt den Wert des ausgewählten Scheins in Euro. Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

3

- b** Beurteilen Sie die folgende Aussage:

2

*Aus Abbildung 1 lässt sich schließen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unter allen im Umlauf befindlichen Geldscheinen zufällig ausgewählter 20 €-Schein gefälscht ist, fast doppelt so hoch war wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies bei einem zufällig ausgewählten 50 €-Schein der Fall ist.*

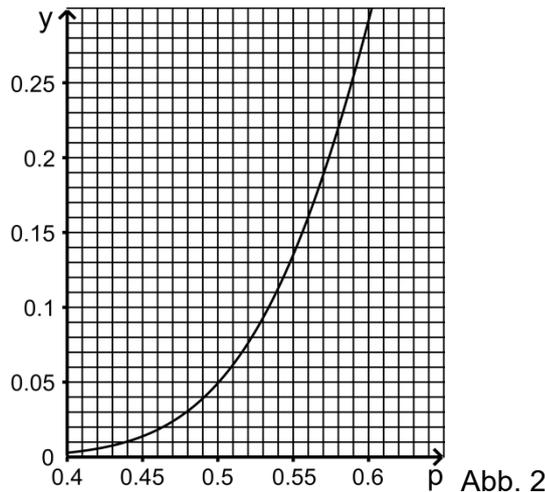
- 4** Eine Kassiererin einer Bank behauptet, nur durch Tasten und Betrachten erkennen zu können, ob ein Geldschein echt oder gefälscht ist. Ein Kollege bezweifelt dies und legt ihr testweise zehn Geldscheine vor. Die Kassiererin muss für jeden der Scheine entscheiden, ob er echt oder gefälscht ist. Wird die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Kassiererin korrekt entscheidet, beträgt höchstens 50 %.“ auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt, so ist der Kollege bereit, seine Zweifel aufzugeben.

- a** Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

5

- b** Der Kassiererin werden im Rahmen eines weiteren Tests mit unveränderter Nullhypothese und unverändertem Signifikanzniveau  $n$  Scheine vorgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie bei einem Geldschein die richtige Entscheidung trifft, wird mit  $p$  bezeichnet. Abbildung 2 stellt für einen bestimmten Wert von  $n$  in Abhängigkeit von  $p$  die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt.

3



Bestimmen Sie für ein geeignet gewähltes Beispiel mithilfe von Abbildung 2 die Wahrscheinlichkeit für den zugehörigen Fehler zweiter Art.

25

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                          | BE |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1 a</b> | Y: Anzahl nicht mehr umlauffähiger Geldscheine<br>$P_{0,02}^{200}(Y = 0) \approx 1,8\%$<br>$P_{0,02}^{200}(Y \leq 2) \approx 23,5\%$                                                                                                                                                     | 3  |
| <b>b</b>   | $P_{0,02}^{332}(Y \geq 4) \approx 89,98\%$ , $P_{0,02}^{333}(Y \geq 4) \approx 90,10\%$<br>In der Kasse müssen sich mindestens 333 Geldscheine befinden.                                                                                                                                 | 4  |
| <b>2 a</b> | $\frac{176-4}{380} \approx 45,3\%$                                                                                                                                                                                                                                                       | 3  |
| <b>b</b>   | Zufallsexperiment: Aus dem Behälter werden sieben Geldscheine zufällig entnommen.<br>Ereignis: Von den entnommenen Scheinen sind zwei nicht mehr umlauffähig.                                                                                                                            | 2  |
| <b>3 a</b> | $\frac{1}{454000} \cdot (6800 \cdot 5\text{€} + 10800 \cdot 10\text{€} + 248500 \cdot 20\text{€} + 142000 \cdot 50\text{€} + 38600 \cdot 100\text{€} + 5000 \cdot 200\text{€} + 2300 \cdot 500\text{€}) \approx 40\text{€}$                                                              | 3  |
| <b>b</b>   | Die Aussage ist falsch.<br>Begründung: Der beschriebene Zusammenhang zwischen gefälschten 20€-Scheinen und gefälschten 50€-Scheinen lässt sich aus der Abbildung nicht schließen, da nicht angegeben ist, wie viele Scheine dieser Werte insgesamt im Jahr 2015 jeweils im Umlauf waren. | 2  |

|          |          |                                                                                                                                                                                                        |    |
|----------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>4</b> | <b>a</b> | Z: Anzahl der korrekten Entscheidungen<br>$P_{0,5}^{10}(Z \geq k) \leq 0,05$<br>Trifft die KassiererIn für mindestens neun Scheine die korrekte Entscheidung, so wird die Nullhypothese abgelehnt.     | 5  |
|          | <b>b</b> | Beispiel: $p = 58\%$<br>Die Wahrscheinlichkeit für den zugehörigen Fehler zweiter Art beträgt etwa $1 - 22\% = 78\%$ .<br>( <i>Hinweis: Der Prüfling muss <math>p</math> größer als 50 % wählen.</i> ) | 3  |
|          |          |                                                                                                                                                                                                        | 25 |

### 3 Standardbezug

| Teilaufgabe | BE | allgemeine mathematische Kompetenzen <sup>1</sup> |     |    |    |    |     | Anforderungsbereich |    |     |
|-------------|----|---------------------------------------------------|-----|----|----|----|-----|---------------------|----|-----|
|             |    | K1                                                | K2  | K3 | K4 | K5 | K6  | I                   | II | III |
| 1 a         | 3  |                                                   |     | I  |    | I  |     | X                   |    |     |
| b           | 4  |                                                   | III | II |    | II |     |                     |    | X   |
| 2 a         | 3  |                                                   | II  | I  |    | I  |     |                     | X  |     |
| b           | 2  |                                                   |     | II | II |    | II  |                     | X  |     |
| 3 a         | 3  |                                                   |     |    | I  | I  |     | X                   |    |     |
| b           | 2  | II                                                |     | II |    |    | II  |                     | X  |     |
| 4 a         | 5  | II                                                |     | II |    |    | II  |                     | X  |     |
| b           | 3  |                                                   | III |    | II |    | III |                     |    | X   |

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>1</sup> Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.