Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Abbildung 1 zeigt schematisch drei Bahnen, auf denen sich eine Kugel beim Kugelstoßen bewegen kann. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m in der Realität; die x-Achse beschreibt den horizontal verlaufenden Boden. Die Kugel soll als punktförmig angenommen werden.

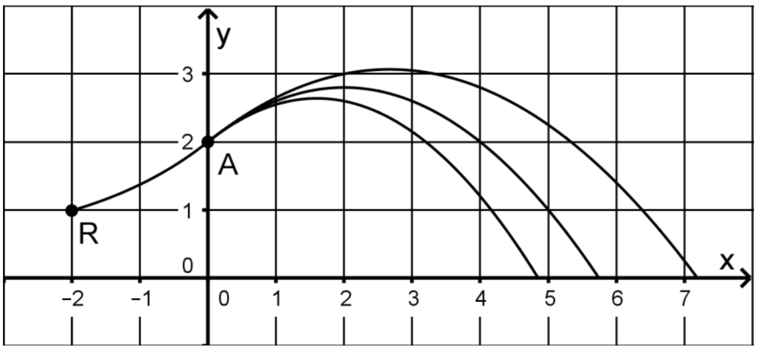


Abb. 1

Die Kugel wird aus der Ruhelage (R) beschleunigt, bis sie im Abstoßpunkt (A) die Hand der Athletin verlässt. Die anschließende Flugkurve der Kugel ist abhängig von ihrer Geschwindigkeit beim Abstoßen. Damit verändert sich insbesondere die Stoßweite, d. h. der horizontale Abstand zwischen Abstoßpunkt und Auftreffpunkt auf dem Boden.

Die Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt kann modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = 0,4 + 1,6 \cdot e^{0,5x}$ und $x \in [-2;0]$ beschrieben werden.

a Berechnen Sie die Länge der Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt näherungsweise als Länge der Strecke zwischen diesen beiden Punkten. 2

b Berechnen Sie den horizontalen Abstand der Kugel von der Ruhelage, wenn sie sich in der Hand der Athletin 1,50 m über dem Boden befindet.	4
c Während eines Stoßes wurde die Höhe der Kugel über dem Boden an fünf Stellen gemessen. Die fünf Stellen werden im Modell durch die x-Werte x_1 bis x_5 dargestellt, die gemessenen Höhen werden mit h_1 bis h_5 bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Wenn der Wert des Terms $\left\|\sum_{i=1}^{5}(h_i - f(x_i))\right\|$ klein ist, dann werden die gemessenen Höhen durch die Werte, die das Modell liefert, gut beschrieben.*	3

Nach dem Abstoßen der Kugel lässt sich jede mögliche Flugkurve mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen p_a mit $p_a(x) = -ax^2 + bx + 2$ und $a \in \mathbb{R}^+$ beschreiben. Alle möglichen Bahnen der Kugel weisen im Abstoßpunkt keinen Knick auf.

d Ermitteln Sie den Wert von b. *(zur Kontrolle: $b = 0{,}8$)*	4
e Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph von p_a durch den Punkt $(3 \mid 3{,}5)$ verläuft.	2
f Bei der Flugkurve zu $a = 0{,}1$ beträgt die Stoßweite 10 m. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Kugel auf den Boden auftrifft.	3
g Zeigen Sie, dass $\left(\frac{0{,}4}{a} \mid 2 + \frac{0{,}16}{a}\right)$ Hochpunkt des Graphen von p_a ist.	4
h Es gibt eine Gerade, auf der die Hochpunkte aller Graphen von p_a liegen. Berechnen Sie die Steigung dieser Gerade.	3

Der Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s mit $s > 0$ lässt sich durch die Gleichung $a = \frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2}$ darstellen.

i Leiten Sie diese Gleichung her.	3
j Bei einem Stoß beträgt die Stoßweite 20 m. Berechnen Sie die Höhe der Flugkurve.	4
k Abbildung 2 stellt den Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s graphisch dar. Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Unterscheiden Sie sich die Weiten zweier Stöße um 2 m, so ist der zur größeren Weite gehörende Wert von a halb so groß wie der zur kleineren Weite gehörende.*	3

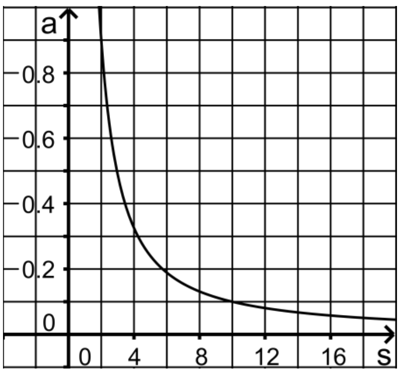


Abb. 2

l Zeichnen Sie in Abbildung 2 die beiden Parallelen zur s-Achse ein, die durch die Punkte des Graphen mit den s-Koordinaten 2 bzw. 10 verlaufen. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph mit der a-Achse und den beiden eingezeichneten Parallelen einschließt.	7

2 Auf dem Boden eines Behälters liegt eine Kugel. Abbildung 3 zeigt – um 90° gedreht – einen Querschnitt dieses Behälters und der Kugel. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 cm, d. h. die Kugel hat einen Durchmesser von 10 cm.

Die Seitenwand des Behälters lässt sich modellhaft durch Rotation des Graphen der Funktion q mit $q(x)=\sqrt{5x+40}$ und $x\in[0;\,13]$ um die x-Achse beschreiben.

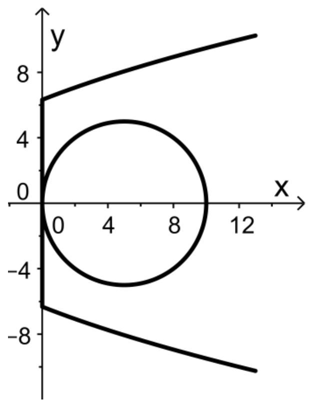


Abb. 3

Der Behälter ist zum großen Teil mit Wasser gefüllt. Die Kugel befindet sich vollständig unterhalb der Wasseroberfläche.

a Zeigen Sie, dass sich im Behälter mehr als $1500\,\text{cm}^3$ Wasser befinden. 5

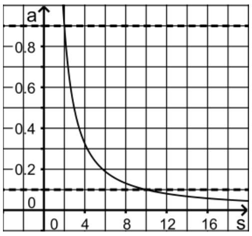
b In den Behälter werden zusätzliche $300\,\text{cm}^3$ Wasser gefüllt. Die Füllhöhe über dem Boden steigt dadurch um 1 cm. Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der sich die Füllhöhe vor dem Einfüllen der $300\,\text{cm}^3$ Wasser berechnen lässt. 3

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$\sqrt{1^2+2^2}\approx 2{,}24$ Die Länge der Bahn beträgt etwa 2,24 m.	2
	b	$f(x)=1{,}5 \Leftrightarrow x=2\cdot\ln\left(\frac{1{,}1}{1{,}6}\right)\approx -0{,}75$, d. h. der Abstand beträgt etwa 1,25 m.	4
	c	Die Aussage ist falsch. Begründung: Werte von $h_i-f(x_i)$, deren Beträge groß sind, können sich zumindest teilweise gegenseitig aufheben, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben.	3
	d	Mit $p_a'(x)=-2ax+b$ und $f'(x)=0{,}8\cdot e^{0{,}5x}$ ergibt sich: $p_a'(0)=f'(0)\Leftrightarrow b=0{,}8$	4
	e	$-a\cdot 3^2+0{,}8\cdot 3+2=3{,}5\Leftrightarrow a=0{,}1$	2
	f	$\tan\varphi=p_{0{,}1}'(10)=-1{,}2$, d. h. $\varphi\approx -50°$ Die Kugel trifft unter einem Winkel mit einer Größe von etwa 50° auf.	3
	g	Der Graph von p_a ist eine nach unten geöffnete Parabel und es gilt: $p_a'\left(\frac{0{,}4}{a}\right)=-2\cdot a\cdot\frac{0{,}4}{a}+0{,}8=0$, $p_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right)=-a\cdot\left(\frac{0{,}4}{a}\right)^2+0{,}8\cdot\frac{0{,}4}{a}+2=2+\frac{0{,}16}{a}$	4

	h	Für $a = 1$ ergibt sich der Hochpunkt $(0{,}4 \mid 2{,}16)$, für $a = 2$ $(0{,}2 \mid 2{,}08)$. Steigung der Gerade: $\frac{2{,}16-2{,}08}{0{,}4-0{,}2} = 0{,}4$	3
	i	$p_a(s) = 0 \Leftrightarrow a \cdot s^2 = 0{,}8s + 2 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2}$	3
	j	Für $s = 20$ ist $a = \frac{0{,}8}{20} + \frac{2}{20^2} = 0{,}045$ Damit: $2 + \frac{0{,}16}{0{,}045} \approx 5{,}6$ Die Höhe der Flugkurve beträgt etwa 5,6 m.	4
	k	Die Aussage ist falsch. Für $s = 10$ ist $a = 0{,}1$, für $s = 12$ weicht der Wert von a mit etwa 0,08 deutlich von der Hälfte von 0,1 ab.	3
	l	 Für $s = 2$ ergibt sich $a = 0{,}9$, für $s = 10$ ist $a = 0{,}1$. $2 \cdot 0{,}9 + \int_2^{10} \left(\frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2}\right) ds - 10 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 + \left[0{,}8 \cdot \ln s - \frac{2}{s}\right]_2^{10} =$ $= 0{,}8 + \left(0{,}8 \cdot \ln 10 - \frac{2}{10} - 0{,}8 \cdot \ln 2 + \frac{2}{2}\right) \approx 2{,}9$	7
2	a	$\pi \cdot \int_0^{10} (q(x))^2\, dx - \frac{4}{3} r^3 \pi = \pi \cdot \left[\frac{5}{2} x^2 + 40x\right]_0^{10} - \frac{500}{3} \pi \approx 1518$	5
	b	Bezeichnet man die Füllhöhe vor dem Einfüllen der $300\,\text{cm}^3$ Wasser mit t, so gilt: $\pi \cdot \int_t^{t+1} (q(x))^2\, dx = 300$	3
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2			I	I	I		X		
b	4			I		I		X		
c	3	III		III	III					X
d	4	I		II		II			X	
e	2					I	I	X		
f	3			I		I	I	X		
g	4					II			X	
h	3		III	I		II				X
i	3		II	I		II			X	
j	4		II	I		I			X	

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

k	3	II			II		II		X	
l	7		III		II	III				X
2 a	5		II	II		II			X	
b	3	III		II		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.