Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
1 Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}^+$ wird die Funktion $f_k : x \mapsto \sqrt{k \cdot x^2 + 400}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ betrachtet.	
a Skizzieren Sie den Graphen von f_5 und geben Sie dessen Symmetrie an. Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jeden Wert von k die gleiche Symmetrie wie der Graph von f_5 aufweist.	4
b Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass f_k keine Nullstellen hat.	2
c Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunkts des Graphen von f_k.	4
d Bestimmen Sie diejenigen Werte von $c \in \mathbb{R}$, für die die Tangente an den Graphen von f_5 im Punkt $\left(c \mid f_5(c)\right)$ die y-Achse in einem Punkt schneidet, dessen y-Koordinate größer als 10 ist.	3
e Zeigen Sie, dass für jeden Wert von k keine der Tangenten an den Graphen von f_k durch den Koordinatenursprung verläuft.	3
Zusätzlich ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \frac{1}{10} \cdot x^2 + 20$ gegeben.	
f Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die der Graph von f_k und der Graph von g mehr als einen gemeinsamen Punkt haben.	4
Die mittlere Abweichung der Funktionswerte von f_5 und g in einem Intervall $[a;b]$ kann mit dem Term $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \left|f_5(x) - g(x)\right| dx$ berechnet werden.	

g Bestimmen Sie damit die mittlere Abweichung der Funktionswerte von f_5 und g im Intervall $[0;15]$. 2

h Die mittlere Abweichung der Funktionswerte von f_5 und g im Intervall $[0;15]$ könnte auch mit dem Term 5

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10}\left(f_5(x)-g(x)\right)dx+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_{10}^{15}\left(g(x)-f_5(x)\right)dx$$

berechnet werden. Beschreiben Sie einen sinnvollen Gedankengang, mit dem man zu diesem Term gelangt.

2 Abbildung 1 zeigt in einem Koordinatensystem schematisch den Aufbau einer Hängebrücke.

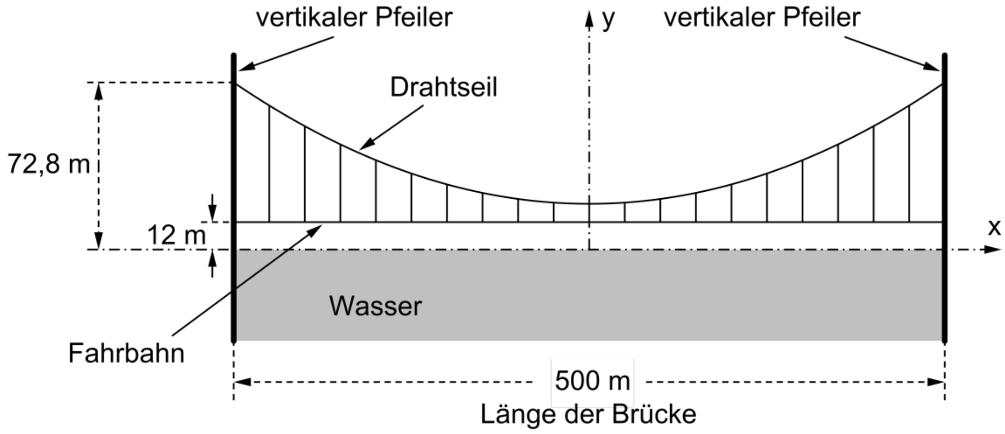


Abb. 1

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die Materialstärken sollen im Folgenden vernachlässigt werden.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_r: x \mapsto r\cdot x^2+20$ mit $r\in\mathbb{R}$.

a Bestimmen Sie denjenigen Wert von r, für den der Verlauf des Drahtseils bezüglich seiner beiden Befestigungspunkte an den Pfeilern mithilfe des Graphen von g_r beschrieben wird. 3

(zur Kontrolle: $r = 0{,}0008448$)

b Für eine Werbeaktion wurde auf einer Seite der Fahrbahn der Bereich zwischen Fahrbahn und Drahtseil über die gesamte Länge der Brücke bis zu einer Höhe von 25 m über der Fahrbahn mit bedruckten Kunststoffplanen bespannt. Bestimmen Sie den Inhalt der bespannten Fläche. 6

Ein zwischen den beiden Befestigungspunkten an den Pfeilern unbelastet hängendes Drahtseil könnte im verwendeten Koordinatensystem mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_{s,t}: x \mapsto \frac{s}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{s}\cdot x}+e^{-\frac{1}{s}\cdot x}\right)+t$ mit $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $t\in\mathbb{R}$ beschrieben werden.

Hinweis: Der Term $\frac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})$ wird von einigen CAS mit $\cosh(x)$ bezeichnet, der Term $\frac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x})$ mit $\sinh(x)$.

c Abbildung 2 zeigt die Graphen dreier Funktionen $h_{s,t}$, die sich nur im Wert von s unterscheiden. Ordnen Sie die Graphen nach der Größe des Werts von s, beginnend mit dem kleinsten. Begründen Sie Ihre Reihenfolge. 3

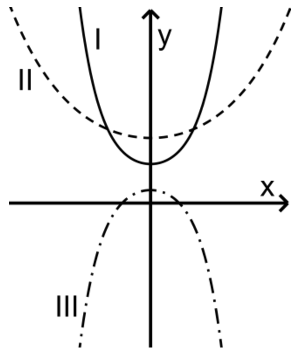


Abb. 2

d Geben Sie für diejenige Funktion $h_{s,t}$, mithilfe derer das unbelastete Drahtseil beschrieben werden könnte, an, ob der Wert von s positiv oder negativ ist. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

Das belastete Drahtseil der Brücke ist 514,5 m lang. Im Folgenden soll angenommen werden, dass das unbelastete Drahtseil die gleiche Länge hat.

e Die Länge des Graphen von $h_{s,t}$ zwischen den Punkten $\left(-v \mid h_{s,t}(-v)\right)$ und $\left(v \mid h_{s,t}(v)\right)$ mit $v \in \mathbb{R}^+$ kann mit dem Term $s \cdot \left(e^{\frac{v}{s}} - e^{-\frac{v}{s}}\right)$ berechnet werden. 4

Bestimmen Sie für diejenige Funktion $h_{s,t}$, mithilfe derer das unbelastete Drahtseil beschrieben werden könnte, die passenden Werte von s und t.

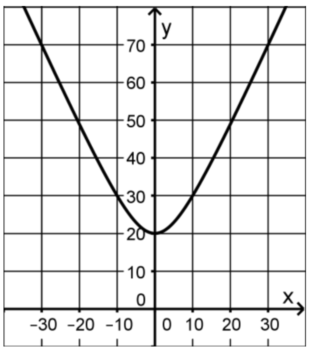
(zur Kontrolle: $s \approx 601{,}9$, $t \approx -581{,}8$)

f Bestimmen Sie die Steigungen des belasteten und des unbelasteten Drahtseils jeweils in den beiden Befestigungspunkten. Begründen Sie unter Verwendung dieser Steigungen, dass das unbelastete Drahtseil nicht vollständig oberhalb oder unterhalb des belasteten verlaufen würde. 4

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	 Der Graph von f_5 ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_k(-x) = f_k(x)$.	4

	b	Für alle $x \in \mathrm{IR}$ gilt $k \cdot x^2 \geq 0$ und damit $k \cdot x^2 + 400 > 0$, d. h. $f_k(x) > 0$.	2
	c	Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f_k hat dessen Extrempunkt die x-Koordinate 0. Mit $f_k(0) = 20$ und $f_k(x) > 20$ für alle $x \neq 0$ ergibt sich, dass der Graph von f_k den Tiefpunkt $(0 \mid 20)$ besitzt.	4
	d	y-Koordinate des Schnittpunkts der Tangente mit der y-Achse: $\frac{80\sqrt{5}}{\sqrt{c^2+80}}$ $\frac{80\sqrt{5}}{\sqrt{c^2+80}} > 10 \Leftrightarrow -4\sqrt{15} < c < 4\sqrt{15}$	3
	e	Würde die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $(x_0 \mid f_k(x_0))$ durch den Koordinatenursprung verlaufen, so müsste $f_k'(x_0) \cdot x_0 = f_k(x_0)$ gelten. Diese Gleichung hat jedoch keine Lösung.	3
	f	$f_k(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -10\sqrt{k-4} \vee x = 0 \vee x = 10\sqrt{k-4}$ Nur für $k > 4$ nehmen die Terme $-10\sqrt{k-4}$ und $10\sqrt{k-4}$ Werte ungleich null an, die Graphen von f_k und g haben damit mehr als einen gemeinsamen Punkt.	4
	g	$\frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} \lvert f_5(x) - g(x) \rvert \, dx \approx 0{,}65$	2
	h	Es gilt $f_5(x) - g(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq 10$ und $f_5(x) - g(x) \leq 0$ für $10 \leq x \leq 15$. Damit sind $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (f_5(x) - g(x))\,dx$ und $\frac{1}{5} \cdot \int_{10}^{15} (g(x) - f_5(x))\,dx$ die mittleren Abweichungen in den Intervallen $[0;10]$ bzw. $[10;15]$. Jede dieser beiden Abweichungen wird entsprechend der Länge des zugehörigen Intervalls gewichtet.	5
2	a	Aufgrund der Symmetrie des Graphen von g_r genügt es, einen der beiden Befestigungspunkte zu betrachten. $g_r(250) = 72{,}8$ liefert $r = 0{,}0008448$.	3
	b	Mit den Lösungen x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$ der Gleichung $g_{0,0008448}(x) = 12 + 25$ ergibt sich: $2 \cdot (250 - x_2) \cdot 25 + \int_{x_1}^{x_2} (g_{0,0008448}(x) - 12)\,dx \approx 9285$ Der Inhalt der bespannten Fläche beträgt etwa $9285\,\mathrm{m}^2$.	6
	c	III - I - II Begründung: Es gilt $h_{s,t}(0) = s + t$, d. h. die y-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen von $h_{s,t}$ mit der y-Achse wird mit zunehmendem Wert von s größer.	3
	d	Damit $h_{s,t}$ zur Beschreibung des unbelasteten Drahtseils geeignet ist, muss der zugehörige Graph linksgekrümmt sein. $h_{s,t}''(x) = \frac{e^{\frac{x}{s}} + e^{-\frac{x}{s}}}{2s} > 0 \Leftrightarrow s > 0$	3
	e	$s \cdot \left(e^{\frac{250}{s}} - e^{-\frac{250}{s}}\right) = 514{,}5$ liefert für $s \in \mathrm{IR}^+$: $s \approx 601{,}9$ Mit $h_{s,t}(250) = 72{,}8$ erhält man $t \approx -581{,}8$.	4
	f	$g_{0.0008448}'(-250) \approx -0{,}422$; $h_{601.9;-581.8}'(-250) \approx -0{,}427$	4

		$g'_{0{,}0008448}(250) \approx 0{,}422$; $h'_{601{,}9;-581{,}8}(250) \approx 0{,}427$ Das unbelastete Drahtseil fällt von den beiden Befestigungspunkten aus jeweils steiler ab als das belastete, verläuft in unmittelbarer Nähe dieser Punkte also unterhalb des belasteten Drahtseils. Da außerdem $h_{601{,}9;-581{,}8}(0) > g_{0{,}000845}(0)$ gilt, verläuft das unbelastete Drahtseil im Bereich seines tiefsten Punkts oberhalb des belasteten.	
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	I			I	I		X		
b	2	I				I		X		
c	4	I				II			X	
d	3	II	III			II				X
e	3	III	III			II				X
f	4	II	II			II			X	
g	2				I		I	X		
h	5	III			III		II			X
2 a	3			I	I	I		X		
b	6			II		II	II		X	
c	3	II			II				X	
d	3	II		I	II				X	
e	4		II			II	II		X	
f	4	III				I	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.