Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.	
1 a Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmen Sie die Art dieser Extrempunkte.	5
(zur Kontrolle: Die Extremstellen sind 20, 100 und 200.)	
b Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass f genau zwei Nullstellen hat.	4
c Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von x-Werten, die sich um 60 unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen. Bestimmen Sie dieses Paar von x-Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an.	4
d Begründen Sie, dass sich aus den Informationen aus Teilaufgabe 1c schließen lässt, dass f für $50 < x < 130$ mindestens eine Extremstelle hat.	3
Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der Gerade mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein.	
e Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert.	4

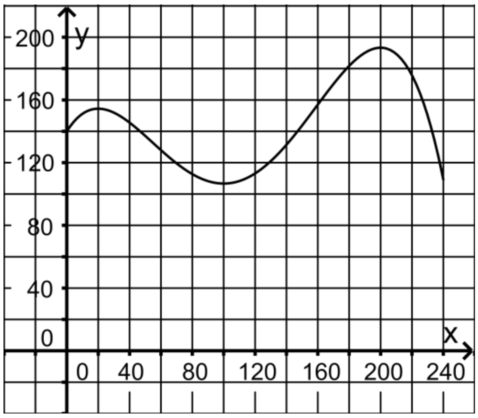
f Die folgende Aussage bezieht sich auf eine zweite Gerade, die das Flächenstück teilt: 4

$$\text{Für } u \approx 217 \text{ gilt: } \tfrac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) + \int_u^{240} f(x)\,dx = \tfrac{2}{3} \cdot \int_0^{240} f(x)\,dx$$

Veranschaulichen Sie die Aussage unter Verwendung einer geeigneten Skizze.

2 Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. die Konzentration der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \le x \le 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



a Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor. Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ gemessen wurden. 3

b Berechnen Sie für den betrachteten Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt. 4

c Veranschaulichen Sie jeden der folgenden Terme in der Abbildung durch eine Gerade und geben Sie jeweils die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang an: 4

I $\quad \dfrac{f(100) - f(20)}{100 - 20}$ $\qquad$ II $\quad \lim\limits_{x \to 60} \dfrac{f(60) - f(x)}{60 - x}$

d Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange die momentane Änderungsrate des Glukosewerts insgesamt zwischen $-0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute und $+0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute lag. 4

e Der Mittelwert der Funktionswerte von f für $x \in [a;b]$ kann mit dem folgenden Term berechnet werden: 5

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Berechnen Sie damit für den Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn den Mittelwert aller Glukosewerte. Bestimmen Sie dessen prozentuale Abweichung vom Durchschnittswert derjenigen Glukosewerte, die in diesem Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn, gemessen wurden.

Zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Patient Traubenzucker zu sich. Die anschließende Entwicklung des Glukosewerts soll im Modell mithilfe einer Funktion g beschrieben werden, die folgende Bedingung erfüllt:

> *Die beiden Werte, die das Modell zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn für den Glukosewert und für dessen momentane Änderungsrate liefert, sollen unabhängig davon sein, ob sie mithilfe der Funktion f oder mithilfe der Funktion g ermittelt werden.*

Zur Bestimmung eines Funktionsterms von g sollen zunächst die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$h_k : x \mapsto 50 - 50 \cdot (k \cdot x + 1)^2 \cdot e^{-k \cdot x} \text{ mit } k \in \mathbb{R}^+$$

betrachtet werden.

f Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die momentane Änderungsrate, die sich unter Verwendung von h_k für den Zeitpunkt 0 ergibt, mit der momentanen Änderungsrate übereinstimmt, die f für den Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn liefert. 2

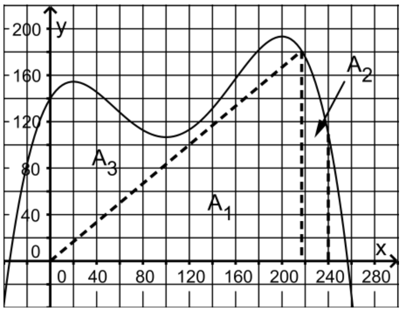
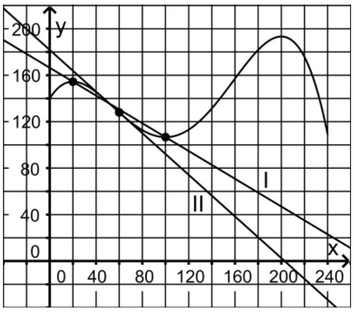
g Die für die Funktion g angegebene Bedingung lässt sich erfüllen, wenn der Graph von g durch eine geeignete Verschiebung aus dem Graphen von h_k für $k = \frac{308}{3125}$ hervorgeht. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie einen Funktionsterm von g an. 4

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20 \vee x = 100 \vee x = 200$ $f''(20) = -\frac{36}{625} < 0$, $f''(100) = \frac{4}{125} > 0$, $f''(200) = -\frac{9}{125} < 0$ Hochpunkte: $\left(20 \mid \frac{11584}{75}\right)$, $\left(200 \mid \frac{580}{3}\right)$ Tiefpunkt: $\left(100 \mid \frac{320}{3}\right)$	5
	b	Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid 140)$ Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ gilt und die y-Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von f positiv ist, hat f genau zwei Nullstellen.	4
	c	Für $50 < x < 130$ liefert $f(x) = f(x+60)$: $x \approx 69{,}2$ Die gesuchten x-Werte sind $x \approx 69{,}2$ und $x \approx 129{,}2$, der zugehörige Funktionswert etwa 120,2.	4

	d	Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von x-Werten mit übereinstimmenden Funktionswerten. Da die Funktion f ganzrational ist, liegt zwischen diesen mindestens eine Extremstelle.	3
	e	$\int_0^k f(x)\,dx = \int_k^{240} f(x)\,dx$ liefert $k \approx 135{,}5$, d. h. die Gerade wird näherungsweise durch die Gleichung $x = 135{,}5$ beschrieben.	4
	f	 Es gilt: $A_1 + A_2 = \frac{2}{3} \cdot (A_1 + A_2 + A_3)$	4
2	a	Mithilfe des Graphen von f und der Gerade mit der Gleichung $y = 170$ ergibt sich, dass Glukosewerte über $170\,\frac{mg}{dl}$ zwischen etwa 170 Minuten und 223 Minuten nach Beobachtungsbeginn und damit etwa 53 Minuten lang gemessen wurden.	3
	b	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) < 0$ liefert: $x \approx 158{,}7$ Da $f'(0) = 1{,}6$ und $f'(158{,}7) \approx 1{,}3$, steigt der Glukosewert zu Beobachtungsbeginn am stärksten an.	4
	c	 I: mittlere Änderungsrate des Glukosewerts im Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn II: momentane Änderungsrate des Glukosewerts 60 Minuten nach Beobachtungsbeginn	4
	d	Mit $\lvert f'(x) \rvert \leq 0{,}3$ ergibt sich, dass die momentane Änderungsrate des Glukosewerts in folgenden Zeiträumen zwischen den angegebenen Werten lag: ♦ von etwa 15,2 Minuten bis etwa 25,8 Minuten ♦ von etwa 90,3 Minuten bis etwa 109,3 Minuten ♦ von etwa 195,5 Minuten bis etwa 203,9 Minuten Damit liegt die momentane Änderungsrate etwa 38 Minuten lang im angegebenen Bereich.	4
	e	Mittelwert aller Glukosewerte: $\frac{1}{80} \cdot \int_{20}^{100} f(x)\,dx \approx 129{,}2$ Mittelwert derjenigen Glukosewerte, die im angegebenen Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten gemessen wurden: $\frac{1}{9} \cdot \big(f(20) + f(30) + \ldots + f(100)\big) \approx 129{,}3$ Der Mittelwert aller Glukosewerte ist etwa 0,1 % kleiner.	5

	f	$h_k'(0) = f'(240) \Leftrightarrow k = \frac{308}{3125}$	2
	g	Der Graph von g geht aus dem Graphen von $h_{\frac{308}{3125}}$ durch eine Verschiebung um 240 in positive x-Richtung und um $f(240)$ in positive y-Richtung hervor. $g(x) = h_{\frac{308}{3125}}(x-240) + f(240)$	4
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I				I		X		
b	4	I				I		X		
c	4		III			III	II			X
d	3	III					II			X
e	4		II			II			X	
f	4		III		III		III			X
2 a	3			I		I	I	X		
b	4	II		II		I			X	
c	4	II		II	II				X	
d	4			II		II	II		X	
e	5			I		II	II		X	
f	2			II		II	II		X	
g	4	III	III				II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.