Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_r mit $f_r(x) = -\frac{1}{r} \cdot x^2 + \frac{4}{r} \cdot x + 2$ und $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.	
1 a Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Graphen von f_6.	2
b Betrachtet wird der folgende Term: $\int_{-2}^{0} f_6(x)\,dx + 4 \cdot 2 + \int_{4}^{6} f_6(x)\,dx$ Markieren Sie in Ihrer Skizze zu Teilaufgabe 1a ein Flächenstück, dessen Inhalt mit dem gegebenen Term berechnet werden kann, und ordnen Sie jedem Summanden des Terms einen passenden Teil dieses Flächenstücks zu. Geben Sie den Inhalt des Flächenstücks an.	4
c Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar bei $x = 2$ ein Extremum hat. Geben Sie in Abhängigkeit von r an, ob es sich dabei um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und nennen Sie den zugehörigen Funktionswert.	4
d Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte, durch die alle Graphen der Schar verlaufen.	4
e Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_r in Abhängigkeit von r.	4
Für $r > -2$ und $r \neq 0$ sind $A_r\left(2-\sqrt{4+2r}\,\middle|\,0\right)$, $B_r\left(2+\sqrt{4+2r}\,\middle|\,0\right)$ und $C(4\,\vert\,2)$ Punkte des Graphen von f_r. Es soll untersucht werden, für welche Werte von r das Dreieck A_rB_rC rechtwinklig ist.	

f Begründen Sie jede der beiden folgenden Aussagen: 5

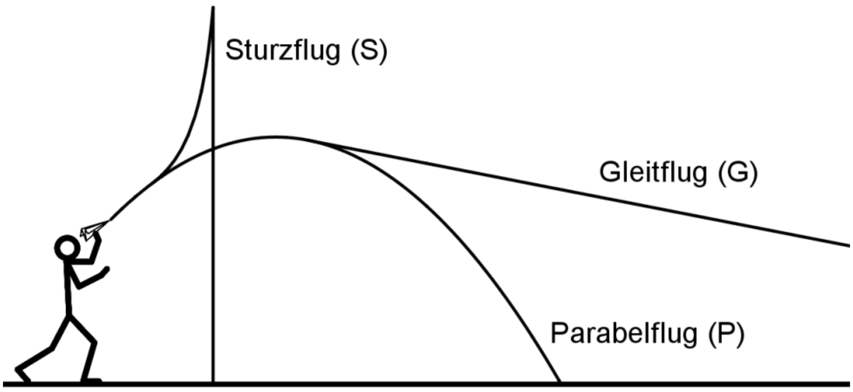
- Weder bei A_r noch bei B_r kann ein rechter Winkel liegen.
- Für $-2 < r < 0$ ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

g Jeder der beiden folgenden Ansätze liefert die gesuchten Werte von r: 4

- $\begin{pmatrix} -\sqrt{4+2r}-2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{4+2r}-2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$
- $\dfrac{2}{2+\sqrt{4+2r}} \cdot \dfrac{2}{2-\sqrt{4+2r}} = -1$

Erläutern Sie die beiden Ansätze.

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei Typen von Flugkurven unterschieden werden, die in der Abbildung schematisch dargestellt sind.



Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

2 Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ P. Diese kann für $x \geq 0$ mithilfe der gegebenen Funktion f_4 beschrieben werden.

a Weisen Sie nach, dass die Flugweite etwa 5,46 m beträgt. 2

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $6{,}3\,\frac{m}{s}$ kann die momentane Höhe des Papierfliegers modellhaft durch $y(t) = -5t^2 + 4{,}45t + 2$ und seine momentane Geschwindigkeit näherungsweise durch $v(t) = \sqrt{100t^2 - 89t + 40}$ beschrieben werden. Dabei ist t die seit dem Abwurf vergangene Zeit in Sekunden, $y(t)$ die Höhe in Metern und $v(t)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

b Weisen Sie auf der Grundlage dieses Modells nach, dass die Flugzeit etwa 1,22 s beträgt. 2

c Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Geschwindigkeit des Papierfliegers unmittelbar vor dem Auftreffen auf dem Boden und beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\int_0^{1,22} v(t)\,dt$ im Sachzusammenhang. 3

3 Im Folgenden wird ein Papierflieger betrachtet, der sich entlang einer Flugkurve des Typs S bewegt. Diese kann im ersten Teil mithilfe der Funktion f_4 beschrieben werden, im zweiten Teil ab einer horizontalen Entfernung von 0,5 m vom Abwurfpunkt mithilfe einer Funktion s mit $s(x)=\frac{a}{x-1,5}+b$ und $a,b\in\mathbb{R}$; dabei weist die Flugkurve keinen Knick auf. Der Papierflieger steigt bis er einen Steigungswinkel mit einer Größe von 85° erreicht und stürzt dann vertikal ab.

a Bestimmen Sie die Werte von a und b. 3

(zur Kontrolle: $a=-0,75$, $b=1,6875$)

b Zeigen Sie, dass der Papierflieger den Steigungswinkel mit einer Größe von 85° in einer horizontalen Entfernung von etwa 1,24 m vom Abwurfpunkt erreicht. 2

c Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge L dieses Kurvenstücks: 6

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(h'(x)\right)^2}\,dx$$

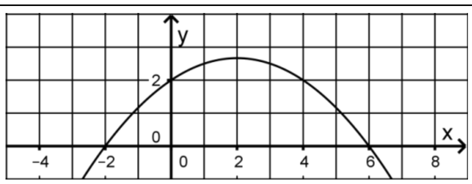
Ermitteln Sie die Länge der Flugkurve des Papierfliegers.

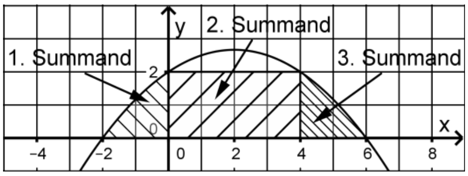
4 Die größten Flugweiten erzielen Papierflieger mit Flugkurven des Typs G. Eine solche Flugkurve lässt sich im ersten Teil mithilfe der Funktion f_4 beschreiben. Ab einem bestimmten Punkt kann der weitere Verlauf der Flugkurve bis zum Boden durch eine Gerade dargestellt werden. Der Übergang vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve erfolgt ohne Knick. Die Flugweite beträgt 17,6 m. Ermitteln Sie, in welcher Höhe der gekrümmte Teil der Flugkurve in den geradlinigen übergeht. 5

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**		2

	b	 Der Inhalt des Flächenstücks ist $12\frac{4}{9}$.	4
	c	$f_r'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$, $f(2)=\frac{4}{r}+2$ Dem Funktionsterm ist zu entnehmen, dass f_r als quadratische Funktion für $r<0$ ein Minimum und für $r>0$ ein Maximum hat.	4
	d	Zwei verschiedene Parabeln haben höchstens zwei gemeinsame Punkte. Da $f_r(0)=2$ gilt und alle Graphen symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x=2$ sind, verlaufen alle Graphen der Schar durch $(0\|2)$ und $(4\|2)$.	4
	e	$f_r(x)=0 \Leftrightarrow x=2-\sqrt{4+2r} \vee x=2+\sqrt{4+2r}$ Da $4+2r>0 \Leftrightarrow r>-2$, hat f_r für $r<-2$ keine Nullstelle, für $r=-2$ genau eine Nullstelle und für $r>-2$ genau zwei Nullstellen.	4
	f	♦ Das Dreieck hätte genau dann einen rechten Winkel bei A_r oder B_r, wenn die x-Koordinate von A_r bzw. B_r mit der x-Koordinate von C übereinstimmte. Dies ist nicht möglich, da die drei Punkte auf demselben Funktionsgraphen liegen. ♦ Für $-2<r<0$ gilt für die x-Koordinate von B_r: $2<x<4$. Damit hat das Dreieck bei B_r einen stumpfen Innenwinkel, ist also nicht rechtwinklig.	5
	g	♦ Die beiden Vektoren auf der linken Seite der Gleichung sind die Verbindungsvektoren von C zu A_r bzw. zu B_r. Ist deren Skalarprodukt null, so ist das Dreieck rechtwinklig. ♦ Die beiden Faktoren auf der linken Seite der Gleichung sind die Steigungen der Geraden durch A_r und C bzw. durch B_r und C. Ist das Produkt dieser Faktoren -1, so ist das Dreieck rechtwinklig.	4
2	a	$f_4(x)=0$ und $x\geq 0$ liefern $x\approx 5{,}46$.	2
	b	$y(t)=0$ liefert $t\approx 1{,}22$.	2
	c	$v(1{,}22)\approx 9{,}0$, d. h. die Geschwindigkeit beträgt etwa $9{,}0\,\frac{m}{s}$. Mit dem angegebenen Term kann die Länge der Flugkurve vom Abwurf bis zur Landung berechnet werden.	3
3	a	$s(0{,}5)=f_4(0{,}5) \wedge s'(0{,}5)=f_4'(0{,}5) \Leftrightarrow a=-0{,}75 \wedge b=1{,}6875$	3
	b	$s'(x)=\tan(85°) \wedge x<1{,}5$ liefert $x\approx 1{,}24$.	2
	c	$\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+(f_4'(x))^2}\,dx+\int\limits_{0,5}^{1,24}\sqrt{1+(s'(x))^2}\,dx+s(1{,}24)\approx 7{,}56$ Die Flugkurve ist etwa 7,56 m lang.	6
4		$g(x)=m\cdot x+n$ $g(17{,}6)=0 \wedge g(x)=f_4(x) \wedge g'(x)=f_4'(x)$ liefert für $x<17{,}6$: $x\approx 2{,}39$ $f_4(2{,}39)\approx 3{,}0$, d. h. der Übergang erfolgt in einer Höhe von etwa 3,0 m.	5
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				I	I		X		
b	4	I			I	I		X		
c	4	I				I		X		
d	4	II				I			X	
e	4	II	II			II			X	
f	5	III	III			II				X
g	4				III	II	II			X
2 a	2			I		I		X		
b	2		II	II		I			X	
c	3				II	I	II		X	
3 a	3			II		II	II		X	
b	2		II	II		II			X	
c	6			II		II	II		X	
4	5		III	III		III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.