

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

In einem Produktionsprozess werden Flüssigkeiten erhitzt, eine Zeit lang bei konstanter Temperatur gehalten und anschließend wieder abgekühlt.

1 Betrachtet wird zunächst ein Vorgang, bei dem der Temperaturverlauf durchgehend gesteuert wird. In der Tabelle sind Ergebnisse einer Temperaturmessung angegeben.

Zeit in Minuten	0	2	4	10	15	20	40	60	80
Temperatur in °C	23,0	54,0	76,9	76,8	77,3	76,8	37,9	26,0	23,2

Der Temperaturverlauf kann während des Erhitzens und während des Abkühlens mithilfe der in IR definierten Funktion f mit $f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$ modellhaft beschrieben werden. Dabei ist t die seit Beginn des Vorgangs vergangene Zeit in Minuten und $f(t)$ die Temperatur in °C.

- | | |
|---|---|
| <p>a Geben Sie an, welche Temperaturen die Funktion f für den Beginn des Vorgangs und für den Zeitpunkt zwei Minuten nach diesem Beginn liefert. Bestimmen Sie jeweils die prozentuale Abweichung von den angegebenen Messwerten.</p> | 3 |
| <p>b Zeigen Sie, dass der Graph von f genau einen Extrempunkt hat, und vergleichen Sie die zu diesem Punkt gehörende Temperatur mit den angegebenen Messwerten.</p> | 4 |
| <p>c Skizzieren Sie den Graphen von f für $0 \leq t \leq 80$ in einem Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für große Werte von t und deuten Sie diesen Verlauf im Sachzusammenhang.</p> | 4 |

BE

d Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit konstant bei 77°C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion f mindestens diese Temperatur liefert. Bestimmen Sie den Zeitabschnitt und stellen Sie den zugehörigen Temperaturverlauf im Koordinatensystem aus Teilaufgabe c dar.

3

Betrachtet wird nun ein Vorgang, bei dem die Steuerung des Temperaturverlaufs zwanzig Minuten nach Beginn des Vorgangs abgeschaltet wird. Das anschließende Abkühlen der Flüssigkeit lässt sich für $t \geq 20$ durch die in IR definierte Funktion h mit $h(t) = 23 + b \cdot e^{c \cdot t}$ und $b, c \in \mathbb{R}$ beschreiben.

e Zu Beginn des Abkühlens soll die Temperatur 77°C und die momentane Änderungsrate der Temperatur $-3,5^\circ\text{C}$ pro Minute betragen. Bestimmen Sie die passenden Werte von b und c .

4

f Ermitteln Sie für die Phase des Abkühlens denjenigen Zeitpunkt, für den die Werte der Funktion f und der Funktion h mit $b = 197,4$ und $c = -0,065$ am stärksten voneinander abweichen. Geben Sie die zugehörige Abweichung an.

5

2 Die Steuerung kann so variiert werden, dass sich der Temperaturverlauf während des gesamten Vorgangs für $t \geq 0$ durch eine der in IR definierten Funktionen f_k mit

$f_k(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10}k \cdot t}$ und $k \in \mathbb{R}^+$ beschreiben lässt. Dabei ist t die seit Beginn des Vorgangs vergangene Zeit in Minuten und $f_k(t)$ die Temperatur in $^\circ\text{C}$.

a Die in Abbildung 1 dargestellten Graphen A, B und C gehören jeweils zu einem der Werte $k = 0,5$, $k = 2$ und $k = 5$. Ordnen Sie jedem dieser Werte den zugehörigen Graphen zu.

2

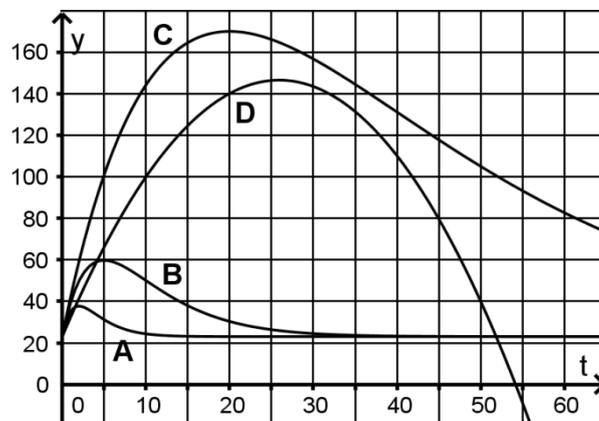


Abb. 1

b Begründen Sie, dass der in Abbildung 1 dargestellte Graph D nicht zu einer der Funktionen f_k gehören kann.

2

c Berechnen Sie denjenigen Wert von k , für den die Flüssigkeit im Modell eine Höchsttemperatur von 98°C erreicht.

4

d Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k . Beschreiben Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang.

4

e Der in Abbildung 2 dargestellte Graph gibt für einen gesteuerten Temperaturverlauf die Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit an, die seit Beginn des Vorgangs vergangen ist.

5

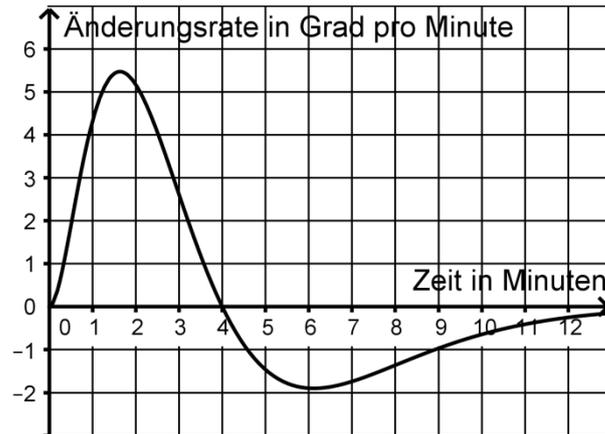


Abb. 2

Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Änderung der Temperatur in den ersten vier Minuten nach Beginn des Vorgangs und geben Sie an, ob die Temperatur zu- oder abnimmt.

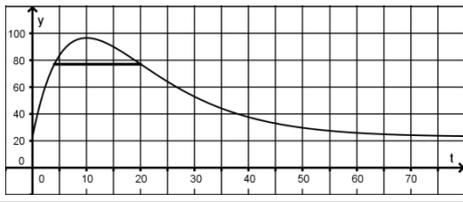
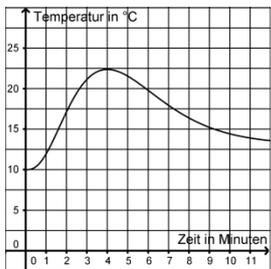
Skizzieren Sie für die ersten zwölf Minuten des Vorgangs den Graphen eines möglichen Temperaturverlaufs.

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$f(0) = 23$; Abweichung: 0 % $f(2) \approx 55,7$; $\frac{f(2) - 54,0}{54,0} \approx 3,2\%$	3
b	$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$, $f''(10) \neq 0$ $f(10) \approx 96,6$ Die Temperatur von etwa $96,6^\circ\text{C}$ ist deutlich größer als die Messwerte.	4
c	<p>Für große Werte von t nähert sich der Graph von f der Geraden mit der Gleichung $y = 23$ an, die Temperatur der Flüssigkeit also mit der Zeit 23°C.</p>	4

	<p>d $f(t) \geq 77$ liefert den Zeitabschnitt $[t_1; t_2]$ mit $t_1 \approx 4,0$ und $t_2 \approx 20,0$.</p> 	3
	<p>e Aus $h(20) = 77$ und $h'(20) = -3,5$ ergibt sich: $b \approx 197,4$, $c \approx -0,065$</p>	4
	<p>f Betrachtet wird die Funktion d mit $d(t) = f(t) - h(t)$. Der Betrag der Funktionswerte von d nimmt für $t \geq 20$ bei $t \approx 25,9$ seinen größten Wert an. Der größte Wert ist etwa 2,2.</p>	5
2	<p>a $k = 0,5$: C, $k = 2$: B, $k = 5$: A</p>	2
	<p>b Es gilt $f_k(t) \geq 23$ für alle $t \geq 0$. Der Graph D liegt für große Werte von t unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 23$.</p>	2
	<p>c $f'_k(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{k}$ $f_k\left(\frac{10}{k}\right) = 98 \Leftrightarrow k = \frac{8}{3e}$</p>	4
	<p>d $f''_k(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{k}$, $f_k\left(\frac{20}{k}\right) = 23 + \frac{400}{ke^2}$ Die x-Koordinate des Wendepunkts gibt den Zeitpunkt an, zu dem Änderung der Temperatur der Flüssigkeit am größten ist.</p>	4
	<p>e Durch Abschätzen des Inhalts der Fläche, die der abgebildete Graph für den betrachteten Zeitraum mit der Zeitachse einschließt, ergibt sich, dass die Temperatur in den ersten vier Minuten um etwa 12° steigt.</p> 	5
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					I		X		
b	4	I		I		I		X		
c	4			I	I		I	X		

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

d	3				I	II	I			X	
e	4		II	II		II				X	
f	5		III			II					X
2 a	2	I			I				X		
b	2	II			II		II			X	
c	4		II	I		II				X	
d	4	II		II				II		X	
e	5		III	II	III						X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.