

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	CAS

1 Aufgabe

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

- 1** Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.

Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

- a** Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.

- b** Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.“

B: „Das Testergebnis ist negativ.“

- c** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.

- 2** Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen

BE

3

3

3

4

an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht.

- 3** Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

a Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können. 4

b Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen. Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss. 4

c Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4,0 mg betragen. 4

Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert. Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	<p style="margin-left: 40px;"> G (1%) <ul style="list-style-type: none"> P (98%) \bar{P} (2%) </p> <p style="margin-left: 40px;"> \bar{G} (99%) <ul style="list-style-type: none"> P (4%) \bar{P} (96%) </p>	<p>G: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“</p> <p>P: „Das Testergebnis ist positiv.“</p> <p style="text-align: right;">3</p>

	b	$P(A) = 0,01 \cdot 0,98 = 0,98\%$ $P(B) = 0,01 \cdot 0,02 + 0,99 \cdot 0,96 \approx 95,06\%$	3
	c	$\frac{0,01 \cdot 0,98}{0,01 \cdot 0,98 + 0,99 \cdot 0,04} \approx 19,8\%$	3
2		$E(X) = 0,01 \cdot 20000 = 200$; $10\% \cdot 200 = 20$ $1 - P_{0,01}^{20000}(180 \leq X \leq 220) \approx 14,5\%$	4
3	a	Folgende Fehlentscheidungen können auftreten: <ul style="list-style-type: none"> ◆ Obwohl höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. ◆ Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. 	4
	b	Y: Anzahl unbrauchbarer Teststreifen Ist k die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, so gilt: $P_{0,1}^{200}(Y \geq k) \leq P_{0,1}^{100}(Y \geq 16) \Leftrightarrow k \geq 29$	4
	c	Z: Indikatormenge in mg Für eine Standardabweichung von 4,0 mg gilt $P(Z < 15) \approx 10,6\%$. $P(Z < 15) \approx 5,3\%$ liefert eine Standardabweichung von etwa 3,1 mg.	4
			25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I	I		I	X		
b	3			I		I		X		
c	3		II	II		I			X	
2	4		II	II		II			X	
3 a	4	II					II		X	
b	4		III	II			II			X
c	4		III	II		II				X

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.