Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

	BE
1 Gegeben ist die Schar der Funktionen f_k mit $f_k(x) = -x^4 + 6kx^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.	
a Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von f_k.	4
b Begründen Sie, dass G_k für alle Werte von k symmetrisch bezüglich der y-Achse ist und für $k \leq 0$ nicht oberhalb der x-Achse verläuft.	3
c Weisen Sie nach, dass G_k für $k > 0$ genau zwei Hochpunkte besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Hochpunkte in Abhängigkeit von k. *(zur Kontrolle: Koordinaten eines Hochpunkts: $(\sqrt{3k} \mid 9k^2)$)*	5
d Untersuchen Sie für $k > 0$ mithilfe der Lage eines der beiden Hochpunkte von G_k in Abhängigkeit von k, wie viele gemeinsame Punkte G_k und die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ haben.	4
e Die in Abbildung 1 dargestellten Graphen gehören jeweils zu einem der Werte $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$ und $k = 1$. Ordnen Sie die angegebenen Werte von k jeweils einem der Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.	3

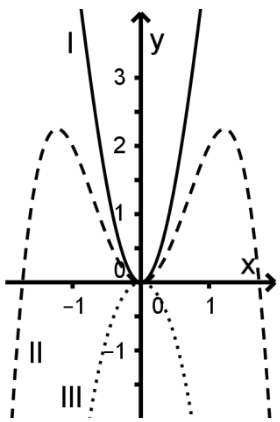


Abb. 1

f Deuten Sie für $k > 0$ das Integral $\int_0^{\sqrt{3k}} \left(9k^2 - f_k(x)\right) dx$ mithilfe einer geeigneten Skizze geometrisch. 3

2 Ein Trainingsgerät zur Schulung der Koordination besteht aus einem Unterbau und einem Standbrett (vgl. Abbildung 2). Das zwei Zentimeter dicke Standbrett schließt seitlich ohne Überstand mit dem Unterbau ab.

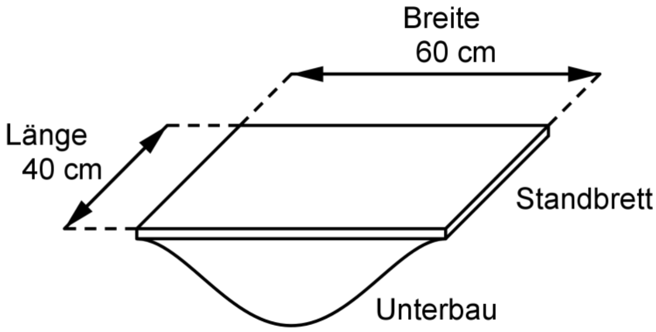


Abb. 2

Das Trainingsgerät hat auf seiner gesamten Länge den gleichen Querschnitt. In diesem Querschnitt wird die untere Profillinie des Unterbaus betrachtet.

Bei horizontal ausgerichtetem Standbrett soll die Profillinie durch eine Funktion modellhaft beschrieben werden. Das Modell geht von einem horizontalen Untergrund aus, der im Querschnitt durch die x-Achse des Koordinatensystems dargestellt wird; eine Längeneinheit im Koordinatensystem soll einem Dezimeter in der Realität entsprechen.

Zunächst wird die Profillinie für $-3 \leq x \leq 3$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion p mit $p(x) = -\frac{1}{48} \cdot \left(x^4 - 18x^2\right)$ beschrieben. Abbildung 3 zeigt den Graphen von p.

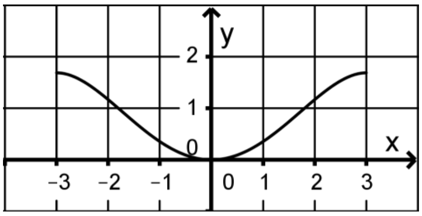


Abb. 3

a Der Graph von p geht durch eine Streckung aus einem der Graphen von f_k aus Aufgabe 1 hervor. Geben Sie den passenden Wert von k an und beschreiben Sie die Streckung. 2

b Begründen Sie, dass der Graph von p im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt hat und genau zwei Hochpunkte besitzt, die in ihren y-Koordinaten übereinstimmen. 3

c Bestimmen Sie die Höhe des Trainingsgeräts in Zentimetern. 3

d Der Unterbau und das Standbrett sind ohne Hohlraum aus Holz gefertigt. Ein Kubikzentimeter des Holzes hat eine Masse von 0,5 Gramm. Berechnen Sie die Masse des Trainingsgeräts in Kilogramm. 7

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $(1 | p(1))$ und $(3 | p(3))$.

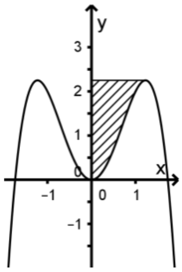
e Weisen Sie nach, dass g die Tangente an den Graphen von p im Punkt $(1 | p(1))$ ist. 3

f	Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels von g.	2
g	Der Steigungswinkel von g hat für das Trainingsgerät hinsichtlich dessen Bewegungsfreiheit eine besondere Bedeutung. Beschreiben Sie diese Bedeutung.	2
	Zur Beschreibung der Profillinie des Unterbaus soll nun eine Funktion q mit $q(x) = a - c \cdot e^{-x^2}$, $a, c \in \mathbb{R}^+$ und $x \in [-3; 3]$ verwendet werden.	
h	Der Graph von q soll durch den Koordinatenursprung verlaufen. Die y-Koordinaten der beiden Randpunkte des Graphen von q sollen mit den y-Koordinaten der Randpunkte des Graphen von p übereinstimmen. Ermitteln Sie die Werte von a und c.	3
i	Begründen Sie, dass die Werte von a und c nicht so gewählt werden können, dass der Graph von q zu seinen Randpunkten hin parallel zur x-Achse ausläuft.	3
		50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 \cdot (x^2 - 6k) = 0$ Damit hat f_k für $k \leq 0$ genau eine Nullstelle, für $k > 0$ genau drei Nullstellen.	4
	b	Der Term von f_k enthält nur Potenzen von x mit geradem Exponenten. Ist $k \leq 0$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $-x^4 \leq 0$, $6kx^2 \leq 0$, d. h. $f_k(x) \leq 0$.	3
	c	Für $k > 0$ gilt: $f_k'(x) = -4x^3 + 12kx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3k} \vee x = \sqrt{3k}$ $f_k''(x) = -12x^2 + 12k$, $f_k''(0) = 12k > 0$, $f_k''(-\sqrt{3k}) = f_k''(\sqrt{3k}) = -24k < 0$ $f_k(-\sqrt{3k}) = f_k(\sqrt{3k}) = 9k^2$ Koordinaten der Hochpunkte: $(-\sqrt{3k} \mid 9k^2)$, $(\sqrt{3k} \mid 9k^2)$	5
	d	Für $k > 0$ gilt: $9k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$ Damit haben G_k und die Gerade für $0 < k < \frac{2}{3}$ keine, für $k = \frac{2}{3}$ genau zwei und für $k > \frac{2}{3}$ genau vier gemeinsame Punkte.	4
	e	Da die Graphen I und II teilweise oberhalb der x-Achse verlaufen, gehört $k = -\frac{1}{2}$ zum Graphen III. Da der Graph II keinen Hochpunkt mit y-Koordinate 9 hat, gehört $k = 1$ zum Graphen I, folglich $k = \frac{1}{2}$ zum Graphen II.	3

	f	 Der Wert des Integrals ist der Inhalt der Fläche, die G_k mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $y = 9k^2$ im I. Quadranten einschließt.	3
2	a	$k = 3$ Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{48}$ in y-Richtung	2
	b	G_3 hat im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt und besitzt genau zwei Hochpunkte, die in ihren y-Koordinaten übereinstimmen. Da der Graph von p durch eine Streckung mit positivem Faktor in y-Richtung aus G_3 hervorgeht, gilt dies auch für den Graphen von p.	3
	c	$p(3) = \frac{27}{16}$, $\frac{27}{16} \cdot 10\,\text{cm} + 2\,\text{cm} \approx 18{,}9\,\text{cm}$	3
	d	Volumen des Unterbaus: $2 \cdot \int_0^3 (p(3) - p(x))\,dx = 2 \cdot \left[\frac{27}{16}x + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{8}x^3\right]_0^3 = 5{,}4$ $5{,}4 \cdot (10\,\text{cm})^2 \cdot 40\,\text{cm} = 21600\,\text{cm}^3$ Volumen des Standbretts: $60\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 4800\,\text{cm}^3$ Masse des Trainingsgeräts: $26400\,\text{cm}^3 \cdot 0{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 13{,}2\,\text{kg}$	7
	e	$p(1) = \frac{17}{48}$ $\frac{\frac{27}{16} - \frac{17}{48}}{2} = \frac{2}{3} = p'(1)$	3
	f	$\tan\alpha = \frac{2}{3}$, d. h. $\alpha \approx 33{,}7°$	2
	g	Wird das Trainingsgerät in Querrichtung um die Größe des Steigungswinkels geneigt, so hat sein Rand Kontakt zum Boden.	2
	h	Mit $q(0) = 0 \Leftrightarrow a = c$ und $q(3) = a - c \cdot e^{-9} = \frac{27}{16}$ ergibt sich: $a \cdot \left(1 - e^{-9}\right) = \frac{27}{16} \Leftrightarrow a = \frac{27}{16 \cdot \left(1 - e^{-9}\right)}$	3
	i	$q'(x) = 2cxe^{-x^2} \neq 0$ für $x = -3$ und $x = 3$	3
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	II	I			I			X	
b	3	I				I	I	X		
c	5	II				II			X	
d	4	II	III			II				X
e	3	II	II		II				X	
f	3	II	II		II				X	
2 a	2	II			II		I		X	
b	3	I				I	I	X		
c	3			I		I		X		
d	7		II	III		III				X
e	3	II	I			II			X	
f	2					I		X		
g	2	II		III			II			X
h	3		II			III	II			X
i	3	II	II			II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.